

車輪型倒立振子を用いたメカトロニクス教材の開発 ～ 現代制御理論の基礎学習教材 ～

伊藤 隆洋*・金田 忠裕*・横山 智彰** (阪府高専*・ヴイストン株式会社**)

1 はじめに

昨今、制御工学の学習を目的としたメカトロニクス教材が開発・販売されており、その代表に倒立振子を用いた教材がある。倒立振子は動作が視覚的にわかりやすく、「倒れないよう制御する」という明確な目的もある。そのため、制御工学の学習をする題材として倒立振子は扱いやすい。しかし、現在販売されている倒立振子を用いた教材は汎用性や精度の高い教材もあるが、価格が5～6万円台と教材としては高価なものや、装置のように大きな規模である場合が多い。

そこで本研究では、ヴイストン株式会社¹⁾と共同で、車輪型倒立振子を用いた安価なメカトロニクス教材の開発を行う。

2 教材について

2.1 概要

教材の目的は基礎的な現代制御理論の学習である。制御対象を車輪型倒立振子とし、制御理論の学習テキストと合わせて1つの教材とする。また、授業において学生1人に教材1つを割り当てられることに大きな意義があると考え、安価な教材を目標とする。

倒立振子の外観を図1、モデル図を図2、仕様を表1に示す。仕様のパラメータは全て実験値である。倒立振子はマブチ製DCモータ1つをアクチュエータとし、電圧制御による前後動作と本体傾斜の2自由度をもつ。駆動の伝達は、モータ軸に取り付けられたゴム管とタイヤとの摩擦を利用している。センサはジャイロセンサとエンコーダを内蔵しており、本体の傾斜角速度とタイヤの回転数を計測している。制御はRenesas製H8マイコンを使用し、プログラムはC言語で作成する。現状で古典制御のPID制御による動作は可能である。

2.2 モデリング

モデル図より作成した運動方程式を(1),(2),(3),(4)式に示す。

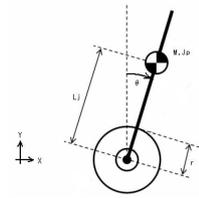


図 1: Balancer 外観

図 2: モデル図

表 1: 倒立振子の仕様

項目	表記	パラメータ
重量 [kg]	M	0.262
重心位置 [m]	L _j	8.412E-2
重心周りにおける慣性モーメント [kgm ²]	J _p	6.02441E-4
タイヤ周りにおける粘性抵抗 [Ns/rad]		3.7859E-4
駆動系伝達関数のパラメータ 1		3.0
駆動系伝達関数のパラメータ 2		0.038

$$X = M \frac{d^2}{dt^2} z(t) + ML_j \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \quad (1)$$

$$Y = Mg \quad (2)$$

$$J_p \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) + ML_j \theta(t) - XL_j - \eta \frac{d}{dt} \theta(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \zeta \frac{d}{dt} z(t) + \xi v(t) \quad (4)$$

ここで、入力電圧を $v(t)[V]$ 、出力を移動距離 $z(t)[m]$ 、 $\theta(t)[rad]$ とし、 X は水平方向の反力、 Y は垂直方向の反力である。また、駆動系のモデル化は古典的に伝達関数を用いて行った。駆動伝達部分が輪ゴム固定であり、数式による入出力関係を導くのは難しいと判断したためである。入力電圧 $u(t)[V]$ から移動速度 $\dot{z}(t)[m/sec]$ への相関が1次遅れ系で表せられるとすると、駆動系のブロック線図は図3となる。

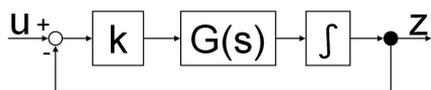


図 3: 駆動系ブロック線図

また、伝達関数は (5) 式となる。

$$G(s) = \frac{\xi}{s + \zeta} \quad (5)$$

ここで、 k は入力値を移動距離 [m] から電圧値 [V] に移すゲインである。また、 ξ と ζ は周波数応答実験により求めることができる。

3 倒立振子の安定化

3.1 状態方程式

(1),(2),(3),(4) 式より、状態方程式は (6) 式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$a_1 = -\zeta, \quad a_2 = \frac{ML_j g}{J_p + ML_j^2}$$

$$a_3 = \frac{ML_j}{J_p + ML_j^2}, \quad a_4 = \frac{-\eta}{J_p + ML_j^2}$$

$$b_1 = - , \quad b_2 = \frac{-ML_j}{J_p + ML_j^2}$$

ここで、(6) 式を (7) 式とおく。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7)$$

(7) 式より、倒立振子の安定化をするフィードバックゲイン K を考慮したブロック線図は図 4 となる。

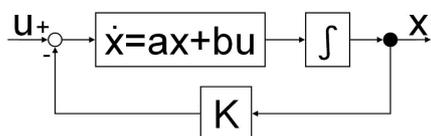


図 4: 倒立振子ブロック線図

K は極配置法により、解析ソフト「Scilab」を用いて導出する。PID 制御での安定化ゲインは既知なので、極の目安も既知である。例として極を (8) 式とした。

$$s = \begin{bmatrix} -240 + 60i & -240 - 60i & -2 + 0.4i & -2 - 0.4i \end{bmatrix} \quad (8)$$

この極より、(9) 式に示すゲインが得られた。

$$K = \begin{bmatrix} 975.52 & 2357.7 & 236.55 & 44.749 \end{bmatrix} \quad (9)$$

3.2 シミュレーション

得られたゲインを用いて、Scilab によるシミュレーションを行った。倒立振子の状態方程式である (7) 式と、表 1 の各パラメータを Scilab に記述し、シミュレーション結果を出力するプログラムを作成した。シミュレーション時間は 3[sec]、初期値は (10) 式とする。

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 5 * 2\pi/360 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

これは倒立振子を 5[deg] 傾けた場合である。倒立振子の移動距離 z と傾斜角 θ のシミュレーション結果を図 5、図 6 に示す。

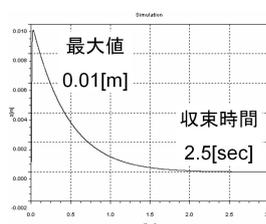


図 5: z

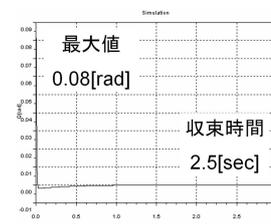


図 6:

この結果より、安定化が施されていることが確認できる。ここで、シミュレーションは連続系であり、センサの分解能等を考慮した離散化は行っていない。

4 まとめと今後の展望

倒立振子をモデル化し、フィードバックゲインを導出してシミュレーションを行った。このゲインを用いて動作実験を行ったところ、安定して倒立を行った。

今後の展望として、次の 3 つを挙げる。

- I) モデルの適正さを検証
- II) 制御設計のテキストを作成
- III) アンケートによる教材としての評価

アンケート調査は、本高専本科 4、5 年生や専攻科 1、2 年生の、制御工学を学びたい人を対象に実施することを考えている。

また、発展段階として、離散系を考慮した補償器や最適レギュレータの設計を行い、テキストに追加することを検討している。

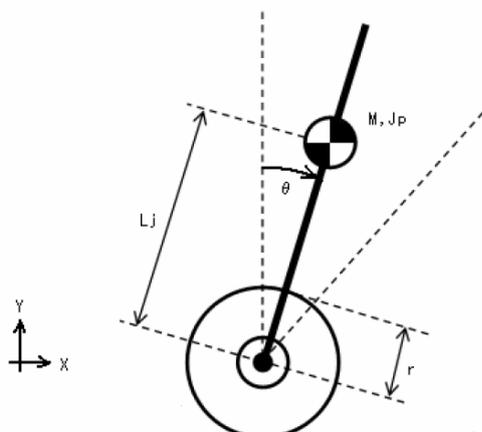
参考 URL

- 1) ヴイストーン株式会社 : <http://vstone.co.jp/>.

設計の流れ

1. はじめに

制御の設計をするにあたって、方向性を先に説明します。



マシン本体部分とタイヤを含む駆動系部分に分けてモデル化を行います。各パラメータは次のとおりです。

(マシン特性)

項目	表記	値
本体重量[kg]	M	0.262
本体部分の重心周りにおける慣性モーメント [kg*m^2]	Jp	6.02441*10^-4
重心位置[m]	Lj	0.08412
タイヤ周りの粘性抵抗 [Ns/rad]		3.7859*10^-4
重力加速度[m/s^2]	g	9.81

(出力：変数)

項目	表記	値
マシン移動距離[m]	z(t)	-
本体傾斜角[rad]	(t)	-
マシン移動速度[m/s]	dz(t)/dt	-
本体傾斜角度[rad/s]	d(t)/dt	-

(入力：変数)

項目	表記	値
モータ入力値	u	-127 ~ 127

2月のインターンシップで行ったタイヤの回転角速度の同定ですが、高専の制御関係の先生方に教えてもらったところ、駆動系を1つの遅れ系伝達関数とモデル化するほうが良いとのことでした。

なので、駆動系を伝達関数として進めます。伝達関数は次の章で説明します。

2. 状態方程式の導出

振子の水平方向について

$$M \frac{d^2}{dt^2} (z + Lj \sin \theta) = X$$

X：水平方向における反力

振子の垂直方向について

$$M \frac{d^2}{dt^2} (Lj \cos \theta) = -Mg + Y$$

Y：水平方向における反力

振子の重心周りについて

$$Jp \frac{d^2}{dt^2} \theta = YLj \sin \theta - XLj \cos \theta - \eta \dot{\theta}$$

入力電圧 v(t) から台車速度 dz(t) が1次遅れ系で表せられるとすると、駆動系の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{\xi}{s + \zeta}$$

ξ, ζ は同定実験で求められるパラメータです。実験に関しては、後で説明します。

入出力の関係から、周波数領域において

$$G(s)L[v(t)] = L[dz(t)]$$

z(0)=0 なので、ラプラス変換を行うと、

$$(s + \xi) \frac{\xi}{s + \zeta} V(s) = sZ(s)(s + \zeta)$$

$$\xi V(s) = s^2 Z(s) + s\zeta Z(s)$$

$$s^2 Z(s) = \xi V(s) - s\zeta Z(s)$$

ラプラス逆変換

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = \xi v(t) - \zeta \frac{d}{dt} z(t)$$

ここで、 θ が 0 付近であるとすると、

$$(\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1)$$

$$X = M \frac{d^2}{dt^2} z(t) + MLj \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$$

$$Y - Mg = 0$$

$$Jp \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) = YLj \theta(t) - XLj - \eta \frac{d}{dt} \theta(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) = -\zeta \frac{d}{dt} z(t) + \xi v(t)$$

以上より、状態方程式

$$\frac{d}{dt} x = Ax + Bu$$

$$x = \left[z, \theta, \frac{d}{dt} z, \frac{d}{dt} \theta \right]^T, u = (\text{モータの入力値})$$

は次のようになります。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = -\xi$$

$$a_2 = \frac{MLjg}{Jp + MLj^2}$$

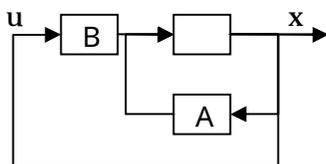
$$a_3 = \frac{MLj\zeta}{Jp + MLj^2}$$

$$a_4 = \frac{-\eta}{Jp + MLj^2}$$

$$b_1 = \xi$$

$$b_2 = \frac{-MLj\xi}{Jp + MLj^2}$$

3. ブロック線図



4. 同定実験

4.1 自由振動による振子系の同定実験

本体部分は振子系とみなせるので、自由振動による同定実験により、本体部分の特性となるパラメータを決定します。下図は実験風景です。



自由振動の運動方程式

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta + \eta \frac{d}{dt} \theta + MgLj \sin \theta = 0$$

J [kg*m²]: タイヤ軸周りの慣性モーメントを近似して、

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta + \eta \frac{d}{dt} \theta + MgLj \theta = 0$$

また、各パラメータは次の式で求めることができます。

$$J = \frac{MgLj}{(\lambda^2 + \omega^2)}$$

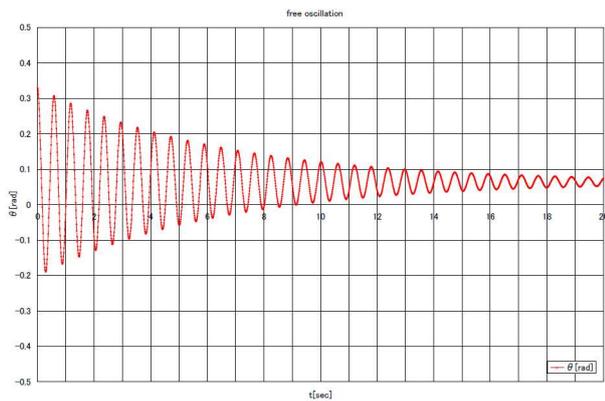
$$\eta = 2\lambda J$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$Jp = J - MLj^2$$

[-]: 減衰率

実験結果のグラフは下図です。



この結果より、
 $= 3.7859 \times 10^{-4}$ [Ns/rad]
 $J_p = 6.02441 \times 10^{-4}$ [kg*m²]

4.2 周波数応答による駆動系の同定実験



上図は実験風景です。

周波数応答による同定実験では、倒立振子を安定系にしておいて、往復動作を、周波数を変えながら行い、どの周波数まで入力に追従するかを測定します。それにより、駆動系が入力に対して遅れる状態を伝達関数に置き換えるためのパラメータが同定できます。今回は駆動系を1次遅れ系とし、マシン全体は2次遅れ系とみなしました。

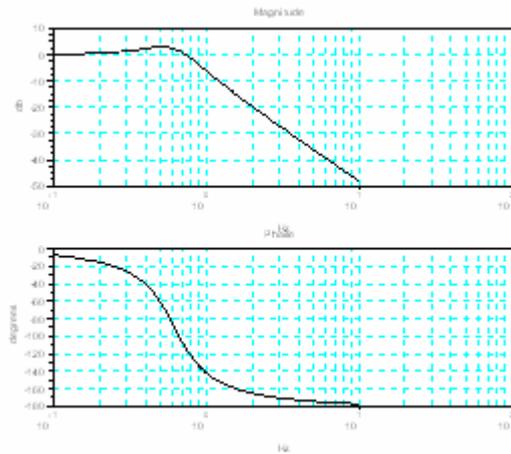
駆動系

$$G(s) = \frac{\xi}{s + \zeta}$$

マシン全体

$$G_m(s) = \frac{k\xi}{s^2 + \zeta s + k\xi}$$

実験結果をボード線図で示します。



上図の上はゲイン、下は位相差を示しています。このボード線図から、

3.0
 0.038

4. シミュレーション

求めたパラメータより、状態方程式は次になります。

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 86.99734 & 0.3369788 & -0.1596426 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -26.603588 \end{pmatrix}$$

極を

$$[-240+60i, -240-60i, -2+0.4i, -2-0.4i]$$

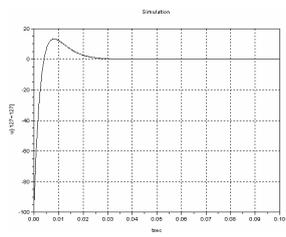
とおくと、フィードバックゲインは、

$$[-975.5, -2357.7, -236.6, -44.7]$$

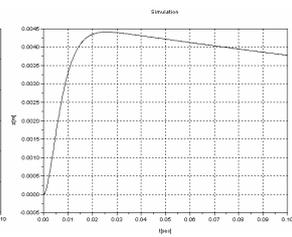
となります。

このゲインをプログラムに代入することで、制御可能です。

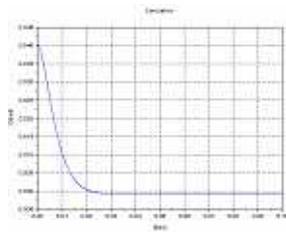
Sci labでのシミュレーション結果を示します。初期値は、 $= 0.04$ [rad] (5°ぐらい)です。



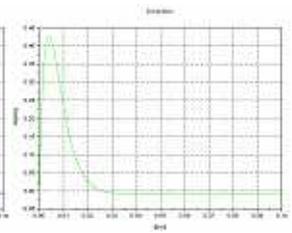
入力 u



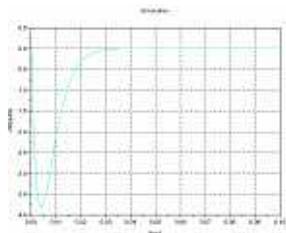
出力 z



出力



出力 dz



出力 d

シミュレーションは実機と比べて動作的に大きな違いはなく、おおよそ合っていると確認できました。
 以上で制御系設計は終わりです。

車輪型倒立振子を用いたメカトロニクス教材の開発



- 現代制御理論の基礎学習教材 -



伊藤隆洋(阪府高専) 金田忠裕(阪府高専) 横山智彰(株ヴィストーン) 2009.8.28

背景

昨今、メカトロニクスの教材が販売されており、その代表に倒立振子を用いた教材がある。現在販売されている倒立振子を用いた教材は、汎用性や精度の高い教材もあるものの、高価であったり規模の大きなものである場合が多い。

安価なメカトロニクス教材の開発を目的とする。

(共同開発：株ヴィストーン)

教材について

コンセプト

現代制御理論の基礎学習が可能な低価格教材

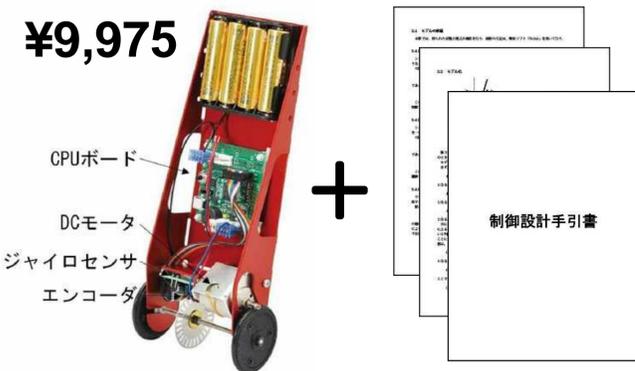
- ・古典制御理論
対象が不明確の状態での制御
- ・現代制御理論
対象を明確化して制御
(現代制御理論にする理由)

“なぜ制御できるのか”
学習教材として適している
工学分野の授業でも扱われる

仕様

Vstone
Beaute Balancer

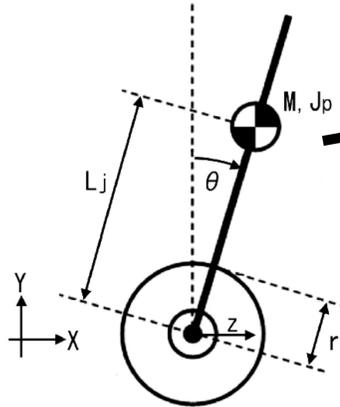
¥9,975



寸法[mm] (横幅×縦幅×高さ)	110×45×210
重量[g] (電池搭載時)	262
DCモータ	マブチ製 RE-260
搭載センサ (各1個)	ジャイロセンサ エンコーダ
CPUボード	VS-WRC003
プログラム言語	C言語

制御設計

モデル化



振子部：運動方程式

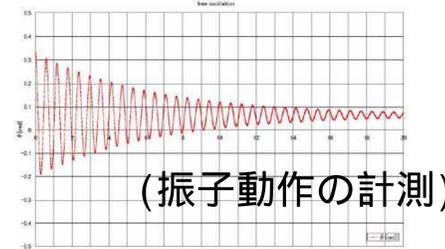
$$\begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2} (z(t) + L_j \sin\theta) &= F_x \\ M \frac{d^2}{dt^2} (L_j \cos\theta) &= -Mg + F_y \\ J_p \frac{d^2}{dt^2} \theta(t) &= Y L_j \sin\theta - X L_j \cos\theta - \eta \frac{d}{dt} \theta \end{aligned}$$

駆動部：伝達関数

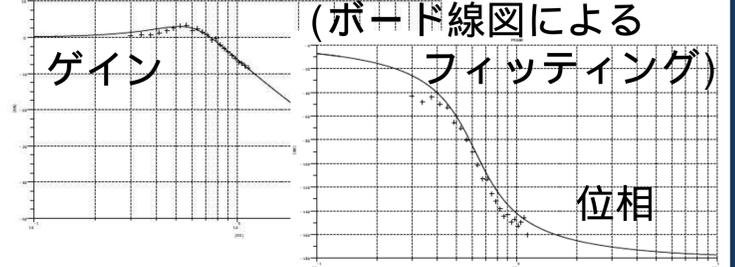
$$G(s) = \frac{\xi}{s + \zeta}$$

同定実験

振子部：
自由振動実験



駆動部：
周波数応答実験



状態空間モデル
 $\dot{x} = Ax + Bu$

モデルの検証

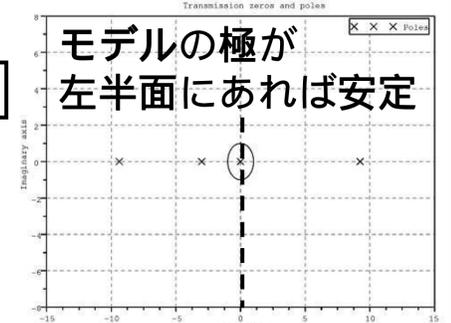
可制御性

可制御性行列
 $M = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$
のランクが、
 $rank M = n$
であることが、
必要十分条件

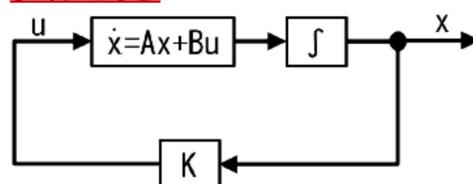
可観測性

可観測性行列
 $N = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$
のランクが、
 $rank N = n$
であることが、
必要十分条件

安定性



安定化

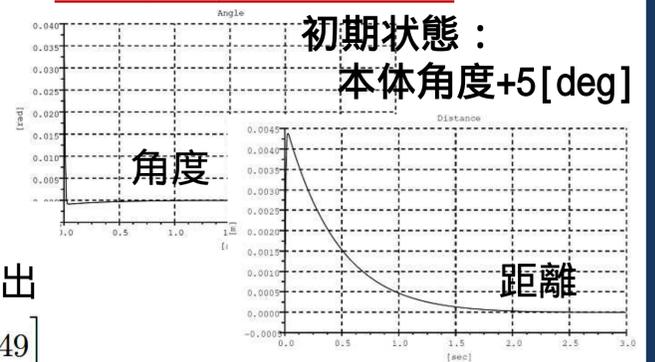


極配置法による
フィードバックゲインKの導出

$$K = [975.52 \quad 2357.7 \quad 236.55 \quad 44.749]$$

安定化モデルの検証

シミュレーション



今後の展望

- 1) モデルの適正検証(動作実験)
- 2) 制御設計手引書作成
- 3) アンケートによる教材評価
+ 発展的内容
(モデルの離散化...etc.)

動作実験(デモ)